МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

ФАКУЛЬТЕТ ПРИРОДНИЧИХ НАУК ТА ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра прикладної математики

О.О. Сдвижкова, Д.В. Бабець, С.Є. Тимченко, Д.В. Клименко

# ФУНКЦІЯ. ГРАНИЦЯ. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЇ

Методичні рекомендації до практичних занять
з дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 113 «Прикладна математика»

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

**Сдвижкова О.О.**

Функція. Границя. Обчислення границь функції : методичні рекомендації до практичних занять з дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 «Прикладна математика» / О.О. Сдвижкова, Д.В. Бабець, С.Є. Тимченко, П.М. Щербаков ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 42 с.

Автори:
О.О. Сдвижкова д-р техн. наук, проф.
Д.В. Бабець, д-р техн. наук, проф.
С.Є. Тимченко, канд. техн. наук, доц.
П.М. Щербаков, канд. техн. наук, доц.

Затверджено науково-методичною комісією спеціальності 113 «Прикладна математика» (протокол № 01/24 від 20.01.2024) за поданням кафедри прикладної математики (протокол №01/24 від 17.01.2024)

Дані методичні рекомендації до практичних занять містять відомості з теорії, вказівки до розв'язання задач відповідного типу, розібрані контрольні приклади, завдання з відповідями для самостійної роботи студентів, а також варіанти індивідуальних завдань з кожного розглянутого розділу.

Відповідальна за випуск завідувачка кафедри прикладної математики О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

## Вступ

Дані методичні вказівки призначено для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 «Прикладна математика», з дисципліни «Математичний аналіз». Вони також можуть бути рекомендовані для студентів перших курсів технічних закладів вищої освіти всіх форм навчання та науково-педагогічних працівників, які викладають курс вищої математики, зокрема, у дистанційному форматі.

Мета даної методичної розробки надати студентам істотну допомогу при вивченні розділу «Функція. Границя. Похідна та її застосування». Структура цієї роботи складається з теоретичного матеріалу, розібраних прикладів і індивідуальних завдань за розглянутими темами. Всі теоретичні викладки містять ретельні пояснення, доведення та супроводжуються характерними прикладами. Методичні вказівки містять велику кількість розібраних задач. З кожної теми є індивідуальні завдання для перевірки успішності.

Весь матеріал розбитий на параграфи, кожен з яких присвячений окремій темі та має розібрані приклади. Наприкінці розділу наведено індивідуальні завдання для самостійної роботи. Методичні вказівки підготовлені з метою підвищення якості навчання студентів і містять елементи теорії, завдання, методичні вказівки, власне, розв'язання задач та завдання для самостійної роботи.

# I. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ

## 1. Визначення функції

***Визначення.*** Нехай $X$ – деяка множина значень змінної $x$ і задано правило, яке кожному числу $x$ з множини $X$ ставить у відповідність певне число $y$. Цю відповідність називають ***функцією*** $y$ від $x$ та записують $y = f(x)$.

Змінну $x$ називають ***аргументом*** або ***незалежною змінною***. Множина всіх значень $X$ – ***область визначення*** функції. Множина $Y$ всіх значень $y = f(x)$ є ***областю змінення*** функції.

Функція $y = f(x)$ задана якщо:

1) визначено множина $X$, з якої беруться числа $x$;
2) вказано закон $f$, за яким відбувається відображення множини $X$ на множину $Y$.

## 1.2. Способи завдання функції

Відповідність між $x$ і $y$ яке визначає функцію $y = f(x)$, встановлює різними способами.

**Табличний** спосіб припускає наявність деякій таблиці, в якій розміщені частині значення $x$ и відповідні їм значення $y$. Наприклад, тригонометричні, логарифмічні и інші таблиці.

**Графічний** спосіб задає графік функції $y = f(x)$, тобто визначає на площині $xOy$ лінію, для якої рівність $y = f(x)$ є її рівнянням.

**Аналітичний** спосіб виражає відповідність $y = f(x)$ за допомогою деякого аналітичного виразу, тобто за допомогою одної або декількох формул, рівняння.

Також існують неявні способи завдання функції, наприклад, **параметричний,** коли величини $x$ і $y$ є функціями допоміжної змінної, яка зветься параметром: $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2]$ . Наприклад, співвідношення $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$ при $0 \le t \le \pi$ визначають частину еліпсу яка розташована вище оси $Ox$. Виключив параметр $t$, замість двох рівнянь одержимо одне:

$$\frac{x}{a}=\cos t,\quad \frac{y}{b}=\sin t \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

### 2.2. Спеціальні класи функцій

***1. Парні і непарні функції.*** Функцію $y=f(x)$, яка задана на симетричному проміжку $(-l,l)$, називають **парною,** якщо $f(-x)=f(x),\quad \forall x\in(-l,l)$. Де в подальшому символ $\forall$ – значіть «для любого». Графік парної функції симетричний відносно оси $Oy$. До парних функцій, яки задані на всій числовій оси, відносяться: $y=x^2$, $y=\cos x$ і багато інших.

Функцію $y=f(x)$, яка задана на проміжку $(-l,l)$, називають **непарною,** якщо $f(-x)=-f(x),\quad \forall x\in(-l,l)$. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат. Прикладом непарних функцій, яки задані на всій числовій оси, є: $y=x^3$, $y=\sin x$ и інші.

***2. Періодичні функції.*** Функцію $y=f(x)$ яка задана на всій числовій оси, називають **періодичною**, якщо існує таке число $T\neq 0$, що $f(x+T)=f(x),\quad \forall x\in(-\infty,\infty)$. Величина $T$ зветься період функції. Якщо $T$ – період, то для будь-якого цілого числа $k$ добуток $kT$ також є періодом функції. Наприклад, функції $y=\sin x$, $y=\cos x$ мають період $2\pi$, але $T=2k\pi$, де $k\in N$, також є періодом цих функцій.

***3. Монотонні функції.*** Функцію $y=f(x)$ яка задана на проміжку, називають **зростаючою**, якщо для будь-якої пари $x_1$ і $x_2$ з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто, при $x_2>x_1$ $\quad f(x_2)>f(x_1)$. Обернена нерівність $f(x_2)<f(x_1)$ при такій же умові $x_2>x_1$ відповідає **спадаючій** функції. Функції які на проміжку або лише зростають або лише спадають називають **монотонними** на цьому проміжку.

## 2.3. Основні елементарні функції

**Степенева**: $y = x^{\alpha}$, де $\alpha$ – будь-яке дійсне число.

**Показникова**: $y = a^{x}$, де $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 1). $X \in (-\infty, \infty)$, $Y \in (0, \infty)$.

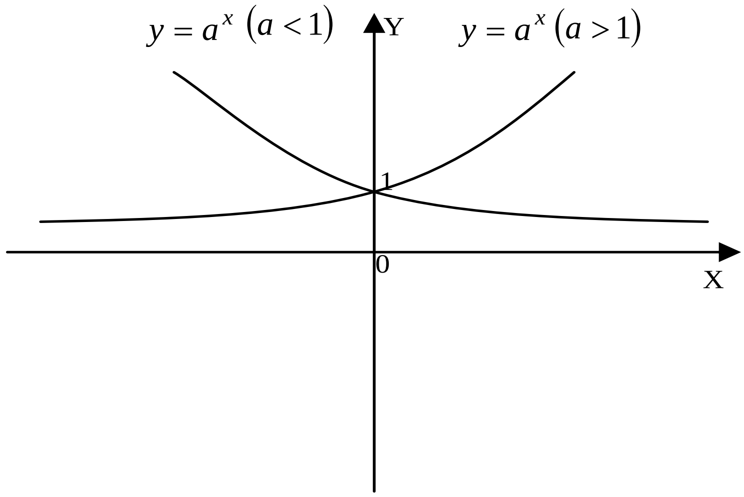



Рис. 1. Показникова функція.

**Логарифмічна**: $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 2). $X \in (0, \infty)$, $Y \in (-\infty, \infty)$.

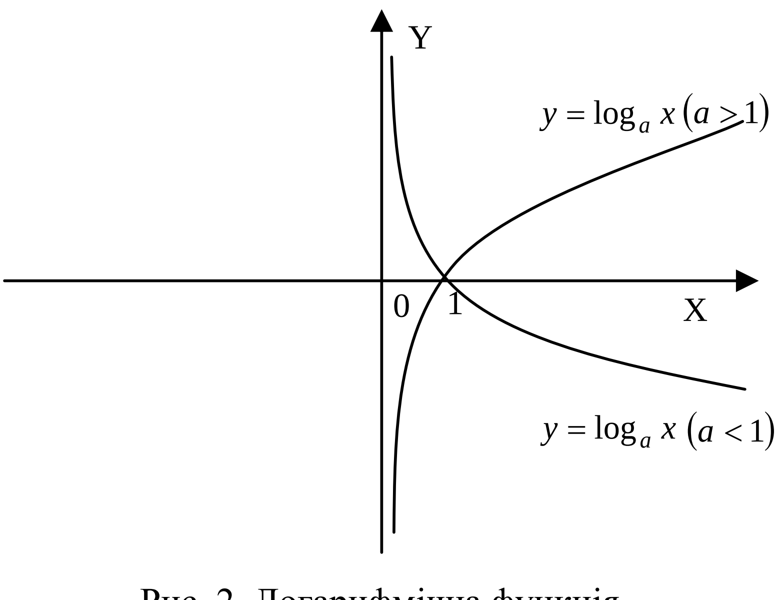



Рис. 2. Логарифмічна функція.

**Тригонометричні**:

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $X \in (-\infty, \infty)$, $Y \in [-1,1]$;

$$y = tgx, \ X \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi, \quad k \in Z, \quad Y \in (-\infty, \infty);$$

$$y = ctgx\,,\ \ X \in (0,\pi) + k\pi, \qquad k \in Z, \quad Y \in (-\infty,\infty).$$

Графіки тригонометричних функцій надані на рис. 3.

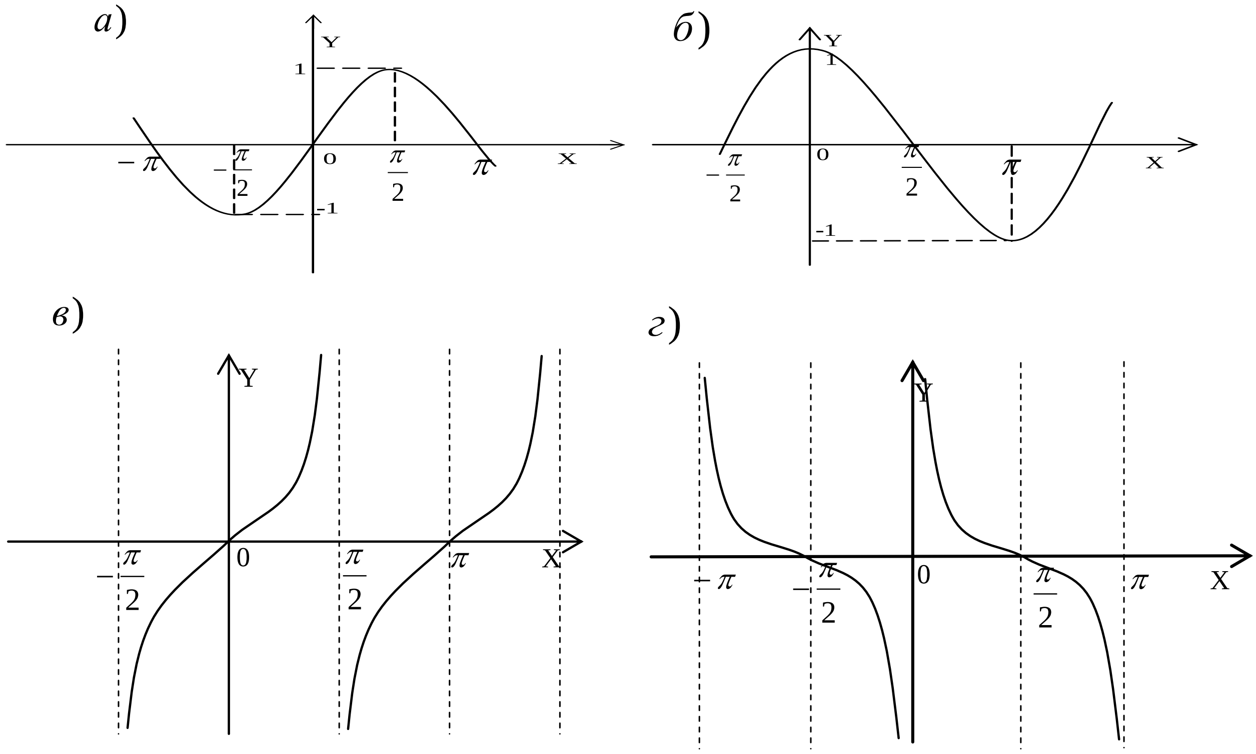



Рис. 3. Графіки тригонометричних функцій:

а) $y = \sin x$, б) $y = \cos x$, в) $y = tgx$, г) $y = ctgx$.

**Обернені тригонометричні функції**

$$y = \arcsin\ x\,,\ \ X \in [-1,1], \qquad Y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y = \arccos\ x\,,\ \ X \in [-1,1], \qquad Y \in [0,\pi];$$

$$y = arctgx\,,\ \ X \in (-\infty,\infty), \qquad Y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y = arcctgx,\ \ X \in (-\infty,\infty), \qquad Y \in (0,\pi).$$

Графіки обернених тригонометричних функцій надані на рис. 4.

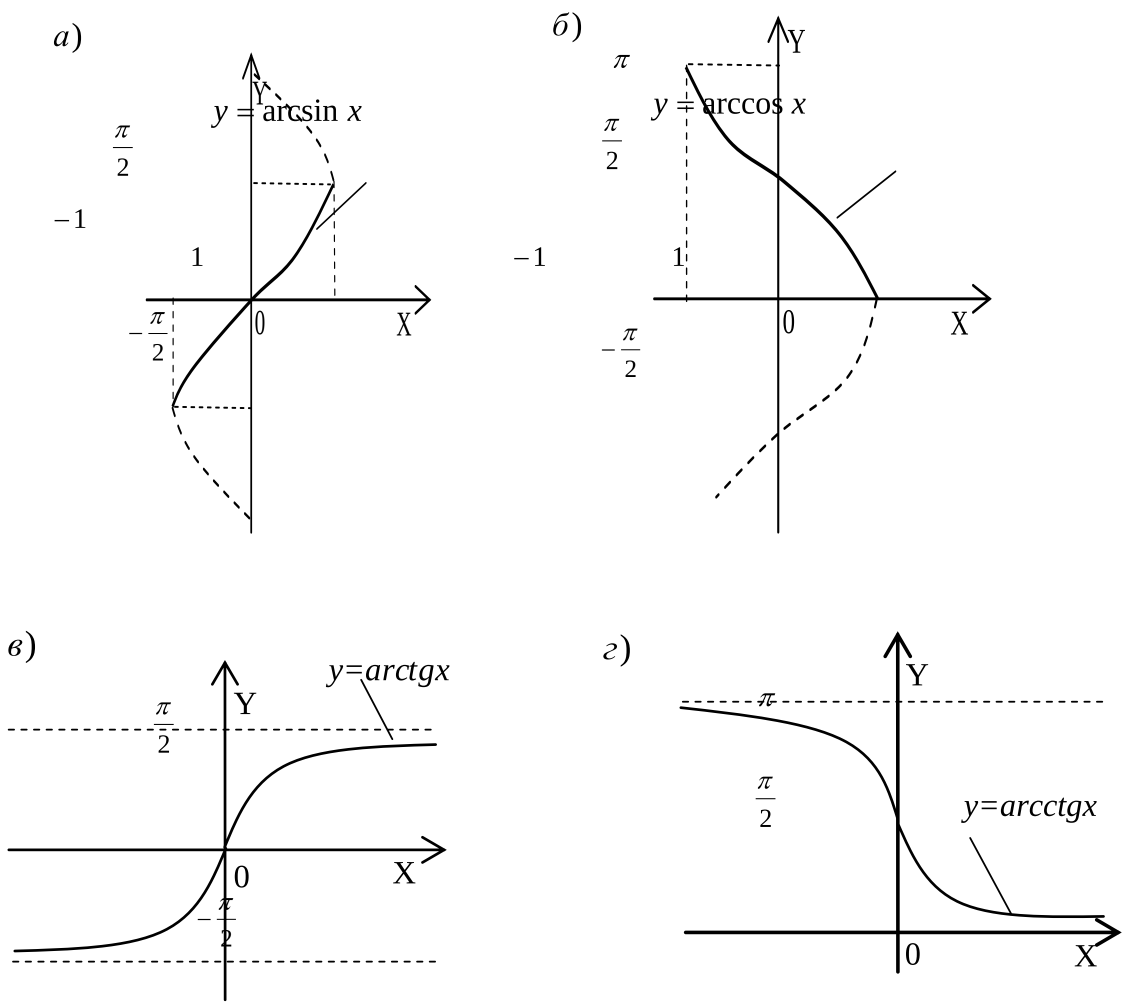



Рис. 4. Графіки обернених тригонометричних функцій:

а) $y = \arcsin x$, б) $y = \arccos x$, в) $y = arctgx$, г) $y = arcctgx$.

## II. ГРАНИЦІ

### 1. Визначення границь

### 1.1. Границя функції при $x \to \infty$

***Визначення.*** Число $a$ є ***границею функції*** $y = f(x)$ ***коли*** $x \to +\infty$, якщо для будь-якого, скель завгодно малого, додатного числа $\varepsilon > 0$, можна найти таке число $N$, що для всіх $x$, більших $N$, виконується нерівність:

$$\left| f(x) - a \right| < \varepsilon.$$

Це означає, що значення функції $y = f(x)$ для всіх $x > N$ містяться в полосі, обмеженої прямими $y = a - \varepsilon$ і $y = a + \varepsilon$ (рис. 5).

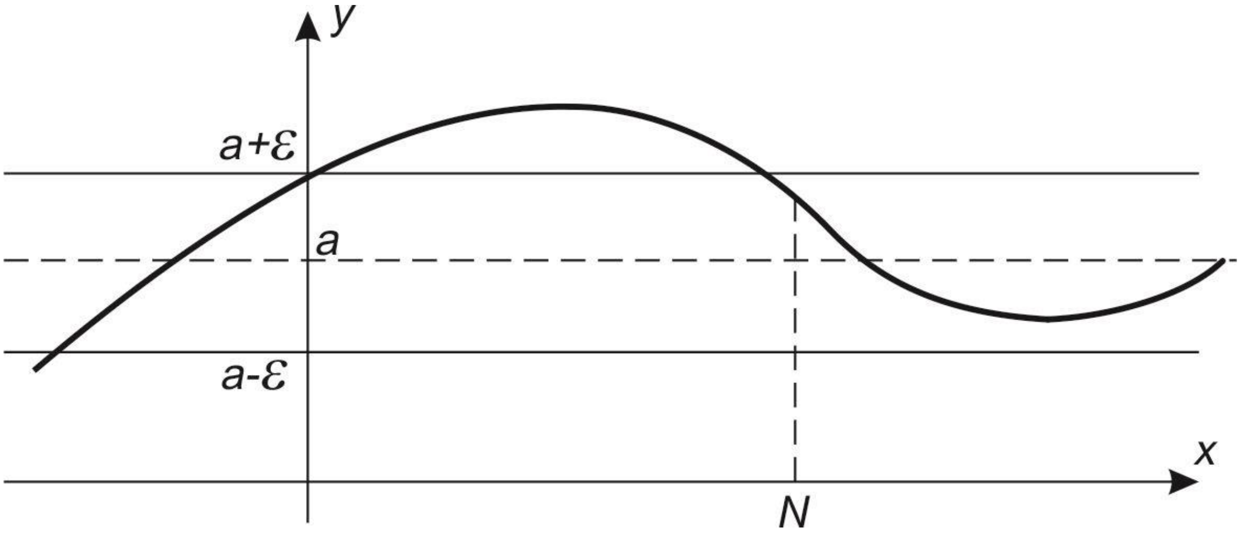



Рис. 5. Визначення границі функції при $x \to +\infty$.

***Визначення.*** Число $a$ зветься **границею функції** $y = f(x)$ **при** $x \to -\infty$, якщо для будь-якого, скель завгодно малого, додатного числа $\varepsilon > 0$, можна знайти таке число $N$, що для всіх $x$, менших $N$, виконується нерівність:

$$\left| f(x) - a \right| < \varepsilon.$$

Це означає, що значення функції $y = f(x)$ для всіх $x < N$ знаходиться в полосі, яка обмежена прямими $y = a - \varepsilon$ і $y = a + \varepsilon$.

### 1.2. Границя функції при $x \to x_0$

***Визначення.*** Число $a$ зветься **границею функції** $f(x)$ **в точці** $x_0$ **справа (зліва)** $\left[ a = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x), \quad \left( a = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \right) \right]$, якщо $f(x)$ визначена в деякому околу точки $x_0$ и для будь-якого, скель завгодно малого, додатного числа $\varepsilon > 0$ існує таке $M > x_0$, $(N < x_0)$, що для всіх $x$ $(x_0 < x < M, \quad (N < x < x_0))$ виконується нерівність $\left| f(x) - a \right| < \varepsilon$.

Якщо обидва односторонні межі існують і дорівнюють одна одної, то говорять, що функція $f(x)$ має границю при $x \to x_0$.

***Визначення.*** Число $a$ називається **границею (межею) функції** $y = f(x)$ **в точці** $x_0$, якщо для будь-якого, скель завгодно малого, додатного числа $\varepsilon > 0$, існують таки числа $N$ и $M$ $(N < x_0 < M)$, що для всіх $x$ з проміжку $(N, M)$, (за виключенням можливо самої точки $x_0$) справедлива нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$. Використовується позначення:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

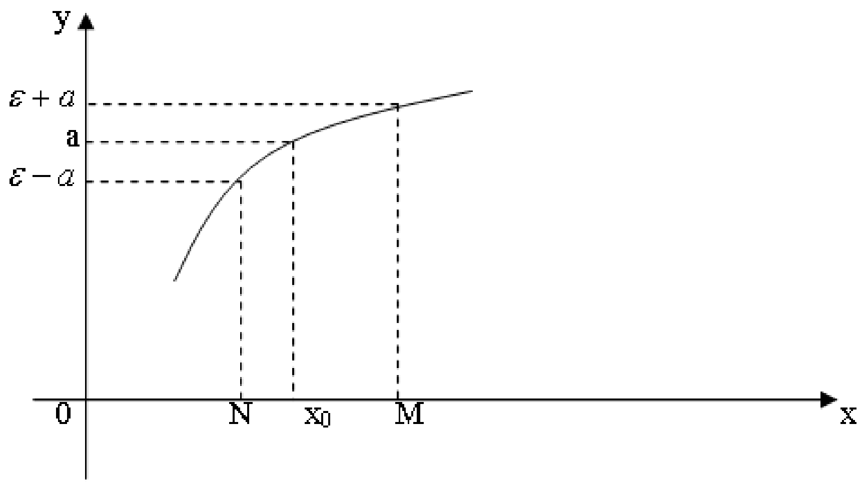



Рис. 6. Визначення границі функції в точці.

**Приклад 1.** Довести, що $\lim\limits_{x \to 1}(3x - 2) = 1.$

<u>Розв'язок</u>. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$ и покажемо, що існують таки числа $M$ і $N$, ( $N < x_0 < M$ ), що для всіх точок з проміжку $(N, M)$ виконується нерівність $|(3x - 2) - 1| < \varepsilon$. Розв'язуючі цю нерівність одержимо:

$$|3x - 3| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < 3x - 3 < \varepsilon \Rightarrow 1 - \tfrac{\varepsilon}{3} < x < 1 + \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Різниця між функцією $y = 3x - 2$ і числом 1 буде за абсолютною величиною менш ніж будь-яке скель завгодно мале $\varepsilon > 0$ для всіх значень $x$, яки знаходяться між числами $N = 1 - \frac{\varepsilon}{3}$ и $M = 1 + \frac{\varepsilon}{3}$. Тому при $x \to 1$ границею даної функції буде число $a = 1$.

### 1.3. Нескінченно мали, нескінченно великі та обмежені функції

Функція $f(x)$ зветься **нескінченно малою** при $x \to +\infty$, якщо її границя при $x \to +\infty$ дорівнює нулю ( $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ).

Аналогічно визначається нескінченно малі функції при $x \to -\infty$, $x \to x_0$.
Нескінченно малу функцію будемо позначати « 0 ».

Функція $f(x)$ зветься **нескінченно великою** при $x \to +\infty$, якщо має місто одна з рівностей: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ , $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ .

Аналогічно визначаються нескінченно великі функції при $x \to -\infty$ , $x \to x_0$ .
Нескінченно велику функцію будемо позначати « $\infty$ ».

Функція $f(x)$ зветься **обмеженою** на деякої множені $Q$ значень аргументу *x,* якщо існує таке додатне число *C,* що для всіх $x \in Q$ , виконується нерівність $|f(x)| \le C$ .

Якщо функція $f(x)$ має границю при $x \to x_0$ , то вона обмежена в деякому околі точки $x_0$.

## 2. Обчислення границь

Якщо $f(x)$ елементарна функція і граничне значення аргументу належіть її області визначення, то обчислення границі функції зводиться до підстановці граничного значення аргументу тобто: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Приклад 2.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x \to 1}(2x^2 + x - 1)$.

Розв’язок:

$$\lim_{x \to 1}(2x^2 + x - 1) = 2 \cdot 1^2 + 1 - 1 = 2.$$

**Приклад 3.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x \to -3}(x^3 - 4x^2 + 2x + 1)$.

Розв’язок:

$$\lim_{x \to -3}(x^3 - 4x^2 + 2x + 1) = (-3)^3 - 4 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 1 = -68;$$

**Приклад 4.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x \to 2}\sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{3x + 1}}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2-4}{3x+1}}=\sqrt{\frac{2^2-4}{3\cdot 2+1}}=0.$$

### 3. Границя частки

При обчислені границі частки використається наступна теорема:

Якщо границі чисельника і знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю, то границя частки дорівнює частці границь чисельника і знаменника:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Використовуючи позначення, яки були введенні у попередньої главі («$\infty$» – нескінченно велика величина, «$0$» – нескінченно мала величина) запишемо наступні узагальнені правила для обчислення границі частки:

$$\{\frac{b}{0}\}=\infty \qquad \{\frac{b}{\infty}\}=0 \qquad \{\frac{b}{+0}\}=+\infty \qquad \{\frac{b}{-0}\}=-\infty$$

$$\{\frac{\infty}{b}\}=\infty \qquad (b>0); \qquad \{\frac{\infty}{a}\}=-\infty \qquad (a<0);$$

де $a$ и $b$ - обмежені границі.

Випадки «$\frac{\infty}{\infty}$» і «$\frac{0}{0}$» звуться «невизначеностями», яки потребують додаткових досліджень (розкриття невизначеності).

**Приклад 5.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{25}{x^2+5x+1}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{25}{x^2+5x+1}=\left\{\frac{25}{\infty}\right\}=0.$$

**Приклад 6.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}$.

Розв'язок:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}=\left\{\frac{3}{0}\right\}=\infty.$$

**Приклад 7.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^3+x-1}{x-2}$.

Розв'язок:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3+x-1}{x-2}=\left\{\frac{9}{-0}\right\}=-\infty.$$

* *Позначення* $x\to 2-0$ *показує, що x наближається до точки 2 «зліва», тобто залишаючись меншим ніж 2. Тоді у знаменнику одержимо нескінченно малу від'ємну величину.*

### 3.1. Розкриття невизначеності вигляду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$

Якщо у чисельнику і знаменнику дробі знаходяться алгебраїчні функції, то невизначеність виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ розкривається діленням чисельника і знаменника на старшую ступінь змінної.

**Приклад 8.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-6}{x^4-2}$.

Розв'язок:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-6}{x^4-2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}-\frac{6}{x^4}}{1-\frac{2}{x^4}}=\left\{\frac{0}{1}\right\}=0.$$

**Приклад 9.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^2+\sqrt{x}}{x^2-4x^4}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-5x^2+\sqrt{x}}{x^2-4x^4}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^{7/2}}}{\dfrac{1}{x^2}-4}=-\frac{1}{2}.$$

**Приклад 10.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+7^{x+2}}{3-7^x}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+7^{x+2}}{3-7^x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{7^x}+\dfrac{7^{x+2}}{7^x}}{\dfrac{3}{7^x}-\dfrac{7^x}{7^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{7^x}+7^2}{\dfrac{3}{7^x}-1}=-49.$$

**Приклад 11.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2}{\sqrt[3]{8x^9+11}}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2}{\sqrt[3]{8x^9+11}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x^3}}{\sqrt[3]{8+\dfrac{11}{x^9}}}=\frac{3}{2}.$$

**Приклад 12.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-x+5}{\sqrt{x^3}+3x-1}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-x+5}{\sqrt{x^3}+3x-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{5}{x^5}}{\dfrac{1}{x^{\frac{7}{2}}}+\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{1}{x^5}}=\left\{\frac{1}{0}\right\}=\infty.$$

**Приклад 13.** Обчислити границю: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t+3}{t+\sqrt[3]{t}}$.

Розв’язок:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{2t+3}{t+\sqrt[3]{t}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{t\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{t}}{1+\dfrac{1}{t^{\frac{2}{3}}}}=\frac{2+0}{1+0}=2.$$

Зауваження: при розкритті невизначеності $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ інколи зручно скористуватися так званим «спрощеним правилом». Нехай даний дріб: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{Qn(x)}{Rm(x)}$, де $Qn(x)$, $Rm(x)$ – многочлени з найбільшими ступенями «$n$» і «$m$», тоді:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Qn(x)}{Rm(x)}=\begin{cases}0, & якщо\ \ m>n\\ \infty, & якщо\ \ n>m\\ A, & якщо\ \ m=n\end{cases},$$

де $A$ – відношення коефіцієнтів при найбільших ступенях $x$ в чисельнику і знаменнику.

**Приклад 14.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^5+7x^4-1}{x(x+4)}$

Розв’язок:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^5+7x^4-1}{x(x+4)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\infty$. Найбільший ступень у чисельнику дорівнює 5, а у знаменнику 2, тому границя дорівнює $\infty$.

**Приклад 15.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

Розв’язок:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=1$. В чисельнику і знаменнику дробі – добуток з 3-х множників. Для розкриття даної границі досить визначити найбільшу ступінь і коефіцієнти $x$ в чисельнику і знаменнику. Старший ступінь чисельника і знаменника 3, коефіцієнти одинакові рівні 1.

**Приклад 16.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2\sqrt{x+1}+3x+2}{\sqrt{5x^5+2}-2x^2+1}$.

<u>Розв'язок</u>:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2\sqrt{x+1}+3x+2}{\sqrt{5x^5+2}-2x^2+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Найбільша ступінь змінної у чисельнику і у знаменнику $\dfrac{5}{2}$, при цьому коефіцієнт при найбільшому ступеню змінної у чисельнику дорівнює 2, а у знаменнику $\sqrt{5}$, тому границя дорівнює відношенню цих коефіцієнтів $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

### 3.2. Розкриття невизначеностей $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$

Нехай границя має вигляд:

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{Pn(x)}{Rm(x)}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, тобто $Pn(x_0)\to 0$ і $Rm(x_0)\to 0$ при $x\to x_0$.

У такому випадку в чисельнику і знаменнику необхідно виділити множник виду $(x-x_0)$ і скоротити дріб, щоб усунути невизначеність виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

<u>Зауваження</u>: необхідно знати формули.

$$x^2-x_0{}^2=(x-x_0)(x+x_0);$$
$$x^3-x_0{}^3=(x-x_0)(x^2+x_0x+x_0{}^2);$$
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)\left(x-x_2\right).$$

**Приклад 17.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$.

<u>Розв'язок</u>:

Знайдемо корені чисельника $x^2-3x+2=0;$ $x_1=2, x_2=1,$ тоді $x^2-3x+2=1\cdot\left(x-2\right)\left(x-1\right)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{(x^2+x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)}{\left(x^2+x+1\right)}=\frac{1-2}{1+1+1}=\frac{-1}{3}.$$

**Приклад 18.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.

<u>Розв'язок</u>:

Для того щоб позбавитися від ірраціональності в знаменнику необхідно перенести її із знаменника в чисельник шляхом множення чисельника і знаменника на вираз $\sqrt{x}+\sqrt{2}$, а потім скоротити дріб.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)(x-3)}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x-3)=(\sqrt{2}+\sqrt{2})(2-3)=-2\sqrt{2}.$$

**Приклад 19.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}$.

<u>Розв'язок</u>:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}=\{\frac{0}{0}\}.$$

Для обчислення даної границі необхідно розділити чисельник і знаменник дробу на вираз $\left(x-x_0\right)$, тобто у даному випадку на $\left(x+2\right)$.

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^5+2x^4+x^2-3x-10 & x+2 \\
\cline{2-2}
\underline{x^5+2x^4\phantom{+x^2-3x-10}} & x^4+x-5 \\
x^2-3x-10 & \\
\underline{x^2+2x\phantom{-10}} & \\
-\,-5x-10 & \\
\underline{-5x-10} & \\
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\, x^4+2x^3+3x^2+5x-2 & x+2 \\ \underline{x^4+2x^3} & x^3+3x-1 \\ -\, 3x^2+5x-2 & \\ \underline{3x^2+6x} & \\ -\, -x-2 & \\ \underline{-x-2} & \\ 0 & \end{array}$$

Після скорочення одержимо:

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x^4+x-5)(x+2)}{(x^3+3x-1)(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x^4+x-5)}{(x^3+3x-1)}==\left\{\frac{((-2)^4+(-2)-5)}{((-2)^3+3\cdot(-2)-1)}=\frac{16-7}{-8-6-1}\right\}=\frac{9}{-15}=-\frac{3}{5}.$$

Для знаходження границь з невизначеністю виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, у запису яких є тригонометричні функції зручно використовувати **першу визначну границю.**

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

Зауваження, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, тоді і $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$.

**Приклад 20.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$

Розв’язок:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

Для розв’язування даного прикладу ми помножили чисельник і знаменник дробу на 5, то і звели вираз до 1-ої визначної границі.

**Приклад 21.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 5\cdot x\cdot \sin 5x}{2\cdot 5\cdot x\cdot \sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$$

У даному випадку множимо чисельник і знаменник на $2\cdot 5\cdot x$.

**Приклад 21.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos\frac{2a}{2}\cdot 1=\cos a.$$

У цьому прикладі ми розклали чисельник на множники, а потім розділили чисельник і знаменник на 2.

**Приклад 21.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot\sin x}{3x}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot\sin x}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\cos 2x\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}.$$

Розв’язування наступної групи прикладів засноване на 1-ої визначної границі та понятті еквівалентних нескінченно малих величин, тобто під знаком границі можна одну нескінченно малу величину замінити на еквівалентну. Приклади еквівалентних нескінченно малих величин:

При $x\to 0$: $\sin\alpha x\sim\alpha x$, $\arcsin\alpha x\sim\alpha x$, $tg\alpha x\sim\alpha x$, $arctgax\sim ax$,

$1-\cos\alpha x\sim\frac{\alpha^2x^2}{2}$ так як $1-\cos\alpha x=2\sin^2\frac{\alpha x}{2}$.

**Приклад 24.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x}{\sin 3x}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

**Приклад 25.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{tg\,2x\sin x}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{tg\,2x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3^2x^2}{2}}{2x\cdot x}=\frac{9}{4}.$$

### 4. Границя добутку та суми

Розглянемо основні правила обчислення меж добутку та суми.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$, і $\lim\limits_{x\to a}v(x)=c$,

тоді $\lim\limits_{x\to a}(u(x)+v(x))=b+c$, $\lim\limits_{x\to a}(u(x)\cdot v(x))=b\cdot c.$

2. Якщо $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$, і $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$,

тоді $\lim\limits_{x\to a}(u(x)+v(x))=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}(u(x)\cdot v(x))=\infty$, при $b\neq 0$.

3. Якщо $\lim\limits_{x\to a}u(x)=\infty$, і $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$,

тоді $\lim\limits_{x\to a}(u(x)+v(x))=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}(u(x)\cdot v(x))=\infty$.

При розв’язані таких прикладів можуть виникати дві невизначеності $\{0\cdot\infty\}$ і $\{\infty-\infty\}$. Для розкриття цих невизначеностей необхідно привести вирази до правил 1-3 або до розглянутих вище невизначеностям $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

**Приклад 26.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^5 - \sqrt[3]{x^4})$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}(x^5 - \sqrt[3]{x^4}) = \{\infty - \infty\} = \lim_{x\to\infty}(x^{4/3}(x^{11/4} - 1)) = \infty .$$

В даному прикладі ми виносимо $x$ в меншому ступеню за дужки і таким чином позбавляємося від невизначеності.

**Приклад 27.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2 + 5x})$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2+5x}) = \{\infty - \infty\} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x - \sqrt{x^2+5x})(x + \sqrt{x^2+5x})}{x + \sqrt{x^2+5x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x + \sqrt{x^2+5x}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{-5}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x}}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{5}{1+1} = -\frac{5}{2}.$$

В даному прикладі ми штучно створюємо знаменник і множимо чисельник і знаменник на сполучений вираз, щоб перенести ірраціональність у знаменник і отримати невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ яку легко можна розкрити.

**Приклад 28.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right)$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right) = \{\infty - \infty\} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

В цьому прикладі ми привели вираз до спільного знаменника і одержали невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

**Приклад 29.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\sin\frac{4}{x}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)\sin\frac{4}{x}=\{\infty\cdot 0\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4(x+1)}{x}\sin\frac{4}{x}}{\frac{4}{x}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{4(1+\frac{1}{x})\sin\frac{4}{x}}{\frac{4}{x}}=4.$$

Для розв’язання даного прикладу помножимо чисельник і знаменник на $\frac{4}{x}$, таким чином перейдемо до 1-ої визначної границі.

### 5. Границя ступеня

Основні правила обчислення границі **степеневно-показникої** функції $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}$.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=b$ і $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=c$, тоді $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=b^c$

2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=b$ і $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=+\infty$, тоді

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=\begin{cases}0 & b>1\\ \infty & 0<b<1\end{cases}$$

3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=b$ і $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=-\infty$, тоді

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=\begin{cases}\infty, & \text{якщо}\quad b>1\\ 0, & \text{якщо}\quad 0<b<1\end{cases}$$

4. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\infty$, і $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=c$, тоді

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=\begin{cases}\infty, & \text{якщо}\quad c>0\\ 0, & \text{якщо}\quad c<0\end{cases}$$

5. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=1$ і $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty$, то при розв'язуванні виникає невизначеність $\left\{1^{\infty}\right\}$. Для її розкриття необхідно використовувати **другу визначну границю:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad \text{або} \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

**Приклад 30.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.

Розв'язок:

Розглянемо окремо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2 \quad \text{і} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)=1,$$

тоді, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)}=2^{1}=2$.

**Приклад 31.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^{2}-x+3}{x^{2}-8x+5}\right)^{x^{2}}$.

Розв'язок:

Розглянемо окремо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{2}-x+3}{x^{2}-8x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^{2}}}{1-\frac{8}{x}+\frac{5}{x^{2}}}=2 \quad \text{і} \quad \lim_{x\to\infty}x^{2}=\infty,$$

тоді, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^{2}-x+3}{x^{2}-8x+5}\right)^{x^{2}}=2^{\infty}=\infty$.

Для розв'язання наступних задач скористуємось 2-ою визначною границею.

**Приклад 32.** Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{5x}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{5x}=\left\{1^{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^{\frac{3}{x}5x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{15x}{x}}=e^{15}.$$

** В показнику ступеня доданий множник $\frac{x}{3}$ для того, щоб одержати $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}$, який дорівнює $e$. Множник $\frac{3}{x}$ за фігурними дужками компенсує множник $\frac{x}{3}$. В наступному прикладі буде використаний аналогічний прийом.*

**Приклад 33.** Обчислити границю: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{x+4}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+3)-1}{x+3}\right)^{x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+3}+\frac{-1}{x+3}\right)^{x+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+3}\right)^{x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+3}\right)^{\left(\frac{x+3}{-1}\right)\cdot\left(\frac{-1}{x+3}\right)(x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{-1}{x+3}\right)(x+4)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{x+3}\right)(x+4)}=e^{-1}.$$

**Приклад 34.** Обчислити границю: $\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{ctgx}$.

Розв’язок:

$$\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{ctgx}=\{1^{\infty}\}=\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}=$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\cos x}=e.$$

### 6. Індивідуальні завдання.

Знайти границі функцій:

1.
$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x-1}}{5\sqrt{x^3}+2};\qquad б)\ \lim_{x\to1}\frac{x^4-x}{1-\sqrt{x}};$$
$$в)\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{3x}$$

2.
$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^5}-x+4}{2x^2\left(\sqrt{x}+1\right)};\qquad б)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}-x};$$
$$в)\ \lim_{x\to0}\frac{\arcsin 3x}{\sin 5x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$$

3.
$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\sqrt{2x}+3x-4}{5x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)};\qquad б)\ \lim_{x\to1}\frac{x^3-x}{x^2-6x+5};$$
$$в)\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 3x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{x+2}$$

4.
$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{5x}-2x+1}{x^2\left(\sqrt{x}+2\right)};\qquad б)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-7x+6}{x-\sqrt{x}};$$
$$в)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 5x}{1-\cos 3x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x}\right)^{x-1}$$

5. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+2x+\sqrt{x^5}}{x^2\left(\sqrt{2x}+\sqrt{3}\right)}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x}{x^2-5x+4}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{1-\cos 2x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+4}\right)^{x-2}$

6. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(1+x\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{5x^3}+3}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-x}{\sqrt{x}-1}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\cdot tg\,2x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{2x-1}$

7. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(x\sqrt{x}+3x+1\right)}{4+6\sqrt{x^5}}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-7x+6}{x-x^4}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 5x}{1-\cos 3x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x+5}\right)^{4x+1}$

8. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(\sqrt{x}+3\right)}{\sqrt{x^5}+\sqrt{x^3}+\sqrt{x}+1}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x^4}{\sqrt{x}-1}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 7x}{\sin 2x\cdot\sin 3x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{2x-1}$

9. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}\left(3\sqrt{x}+4\right)}{5x+\sqrt{x}+2}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^3-1}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cdot\sin 3x}{1-\cos 5x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-7}{5x+1}\right)^{3x+1}$

10. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}\left(5x-\sqrt{x}+1\right)}{3+\sqrt{x^3}+x}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-3x^2+2x}$

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\,2x\cdot\sin 3x}{1-\cos 6x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^{3x}$.

11.
$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x-1}}{5\sqrt{x^5}+x};\qquad б)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-x}{\sqrt{x}-1};$$
$$в)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5x^2};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+5}\right)^{2x}$$

12.
$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^3}-x+2}{4x\left(\sqrt{x}+7\right)};\qquad б)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x};$$
$$в)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{\sin 7x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{4x}$$

13.
$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{2x}+3x^2-4}{5x\left(\sqrt[3]{x}-2x\right)};\qquad б)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-6x+5};$$
$$в)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 4x}}{\sin 8x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{5x-2}$$

14.
$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{2x}-2x+1}{x^2\left(3\sqrt{x}+5\right)};\qquad б)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-7x+6}{x^3-1};$$
$$в)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{1-\cos 6x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x}\right)^{2x-1}$$

15.
$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3+2x+\sqrt{x^5}}{x^2\left(3\sqrt{x}+x\right)};\qquad б)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-5x+4};$$
$$в)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{1-\cos 2x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+4}\right)^{7x-2}$$

16. $а)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(1+x\sqrt{x}\right)}{5\sqrt{x^5}+1};\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x}-1};$

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot tg5x};\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+1}\right)^{x-2}$

17. $а)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{x}+3x+1\right)}{1-6\sqrt{x^3}};\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-7x+6}{x-1};$

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 7x}{1-\cos 4x};\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-4}{5x+5}\right)^{4-x}$

18. $а)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(3\sqrt{x}+8\right)}{2\sqrt{x^5}+\sqrt{x^3}+\sqrt{x}+1};\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x^4}{x-1};$

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin 2x\cdot\sin 5x};\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+4}\right)^{3-2x}$

19. $а)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+4\right)}{5x-\sqrt{x}+2};\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-1};$

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}x\cdot\sin 3x}{1-\cos 6x};\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-7}{4x+1}\right)^{4x+1}$

20. $а)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\left(5x-\sqrt{x}+1\right)}{3+5\sqrt{x^7}+x};\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-3x^2+2x}$

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg5x\cdot\arcsin 3x}{1-\cos 2x};\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^{2-3x}.$

21. $а)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\cdot\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x-1}}{5\sqrt{x^5}+2};\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{1-\sqrt{x}};$

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3tg(4x^2)};\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^{2-3x}$

22.

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3\sqrt{x^5}-x+4}{x^2\left(2-\sqrt{x}\right)};\qquad б)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-\sqrt{x}};$$

$$в)\ \lim_{x\to0}\frac{tg\,3x}{\sin 5x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3-2x}$$

23.

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{2x}+3x-4}{5x^2\left(\sqrt[3]{x}+1\right)};\qquad б)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2-6x+5};$$

$$в)\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos 4x}}{\sin 5x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{3x+2}$$

24.

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(5\sqrt{x}-2x+1)}{x^2\left(2-3\sqrt{x}\right)};\qquad б)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-7x+6}{x^3-1};$$

$$в)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 4x}{1-\cos 6x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x}\right)^{2x-1}$$

25.

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1+2x+3\sqrt{x^5}}{x^2\left(2\sqrt{x}+x\right)};\qquad б)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-5x+4};$$

$$в)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{1-\cos 4x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{2x-1}$$

# III. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

## 1. Поняття неперервності функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в точці $x_0$ і деякому її околу. Значення функції в цієї точці $f(x_0)$. Дамо $x$ приріст $\Delta x$. Новому значенню аргументу відповідає нове значення функції $f(x_0 + \Delta x)$. Приріст функції дорівнює:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

***Визначення 1.*** Функція $y = f(x)$ ***неперервна в точці*** $x_0$, якщо вона визначена в цій точці, і нескінченно малому приросту аргументу в цієї точці відповідає нескінченне малий приріст функції, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (рис. 7).

Це визначення можна розширити. Функція $y = f(x)$ ***неперервна в точці*** $x_0$, якщо:

1. Функція визначена в точці $x_0$ і в деякому її околу;
2. Однобічні границі однакові і співпадають із значенням функції в точці: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$

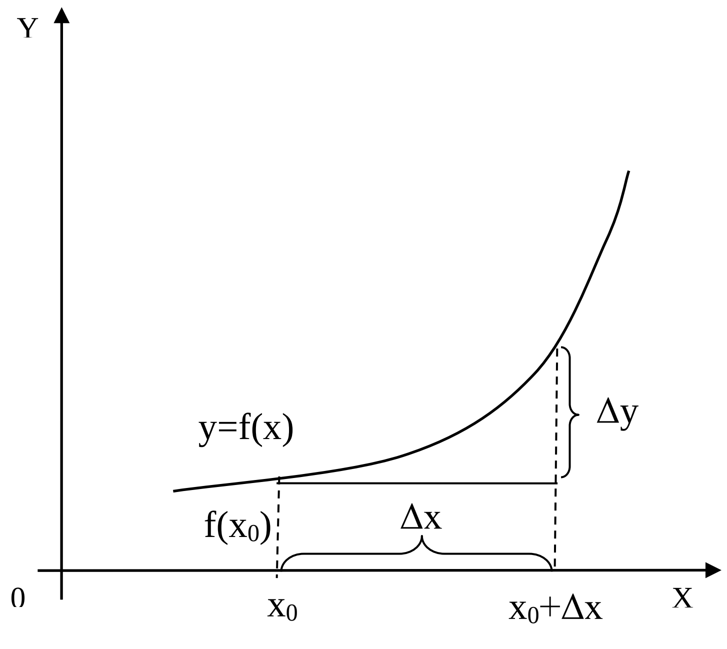



Рис. 7. Визначення поняття неперервності функції

**2. Класифікація точок розриву**

Точка $x_0$ зветься точкою розриву функції $y = f(x)$, якщо вона належить до області визначення функції або її границі і не є точкою неперервності.

1. ***Точки розриву I-го роду (скінчений розрив або «стрибок»)***. Якщо однобічні границі $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ і $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ (рис. 8) функції в точці $x_0$ існують, обмежені, але не дорівнюють один одному, то говорять, що функція має в точці $x_0$ ***скінчений розрив I-го роду***. ***Стрибком*** $h$ функції $y = f(x)$ в точці розриву $x_0$ зветься різниця її однобічних границь $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, якщо вони різни. На рис. 8а стрибок функції $y = f(x)$ дорівнює $(a-b)$, де значення функції співпадає з правою границею функції (дорівнює $a$), на рис. 8б) стрибок функції $h = 0$ і має місто усувний розрив.

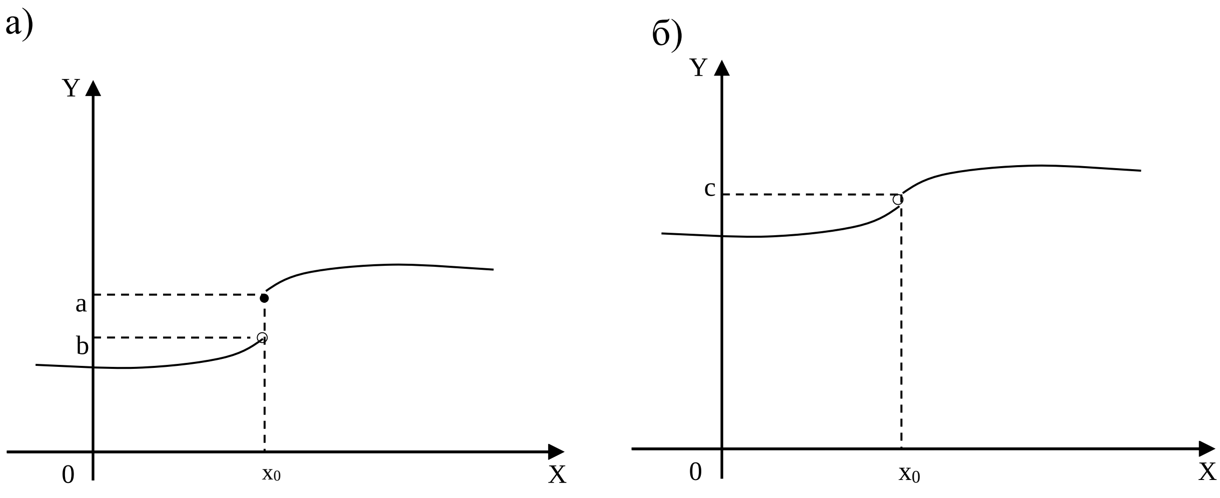



Рис. 8. Точки розриву I-го роду

2. ***Точки розриву II-го роду (нескінчений розрив)***. Розрив функції в точці $x_0$ зветься **нескінченим**, якщо хоча б одна з однобічних границь $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ не існує або нескінчений. (рис. 9)

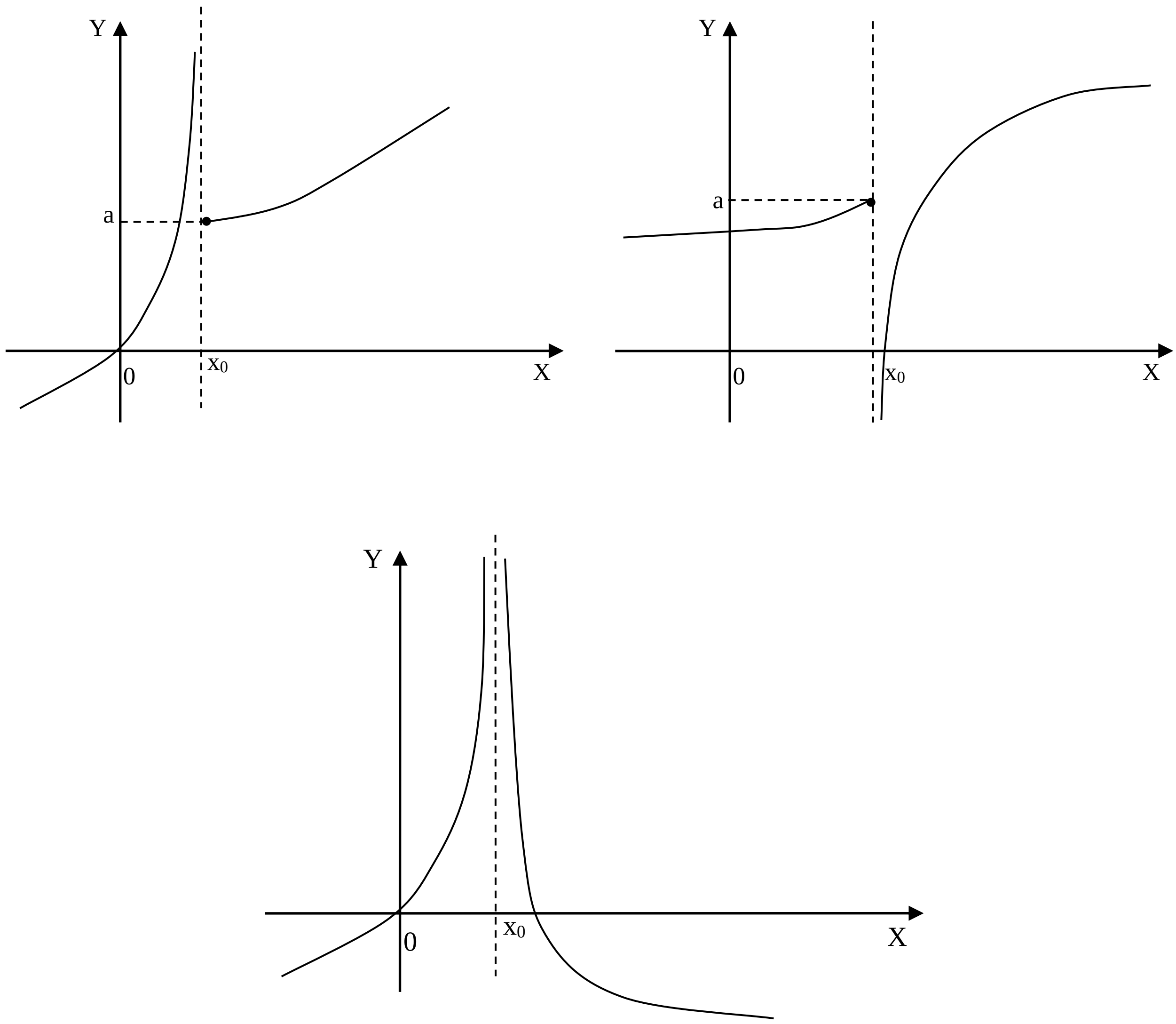



Рис. 9. Точки розриву II-го роду

Всі елементарні функції неперервні в тих інтервалах, у яких вони визначені. Неелементарні функції можуть мати розриви як в точках, де вони не визначені, так и в точках, де вони визначені. Наприклад, якщо функція задана декількома різними аналітичними виразами для різних інтервалів змінення аргументу, то вона може мати розриві в тих точках, де змінюється її аналітичний вираз.

**Приклад 36.** Знайти точки розриву функції $f(x)=\begin{cases}-x, & -\infty<x<0\\ 2, & x=0\\ x-1, & 0<x<\infty\end{cases}$,

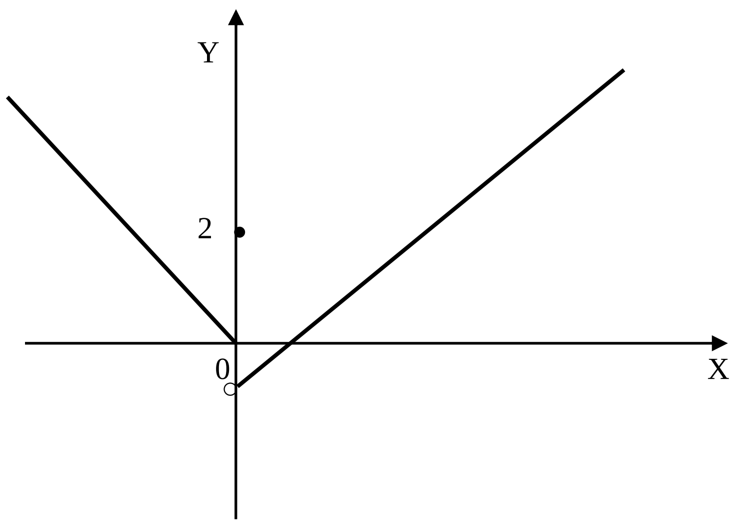
дослідити їх характер і побудувати графік.

Розв'язок. Функція складається з декількох аналітичних виразів для різних інтервалів $x$. На кожному інтервалі $x$ вона задається неперервними функціями, отже, підозріла на розрив є лише точка $x=0$. Знайдемо лівосторонню та правосторонню границі функції в точці $x=0$.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} (-x) = 0;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} (x-1) = -1.$$

Лівостороння та правостороння границі існують і вони різні, отже, в точці $x=0$ існує розрив I-го роду. Стрибок функції $h=-1-0=-1$. Побудуємо графік цієї функції.




**Приклад 37.** Знайти точки розриву функції $f(x)=\begin{cases} \sin x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$,

дослідити їх характер і побудувати графік.

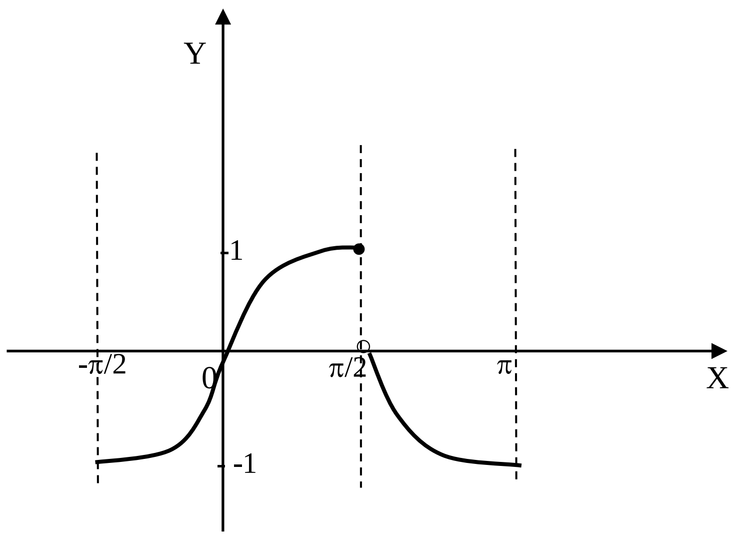
Розв'язок. Як і в попередньому прикладі, функція складається з двох неперервних часток, отже, підозріла на розрив є лише точка $x=\dfrac{\pi}{2}$. Знайдемо лівосторонню та правосторонню границі функції в точці $x=\dfrac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sin x=1;$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\cos x=0.$$

Лівостороння та правостороння границі функції існують і вони різні, отже, в точці $x=\frac{\pi}{2}$ існує розрив І-го роду. $h=0-1=-1$.

Побудуємо графік цієї функції.




**Приклад 38.** Знайти точки розриву функції $f(x)=\begin{cases} x^2, & -\infty<x<0 \\ 0, & x=0 \\ x, & 0<x<\infty \end{cases}$,

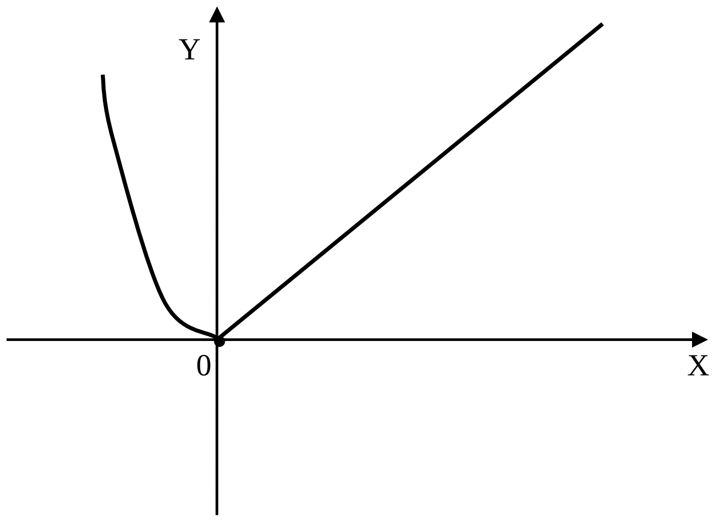
дослідити їх характер і побудувати графік.

<u>Розв’язок.</u> Знайдемо лівосторонню та правосторонню границі функції в точці $x=0$.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} x^2=0;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} x=0;\ f(0)=0.$$

Лівостороння та правостороння границі функції існують, дорівнюють одна одної і співпадають із значенням функції в точці $x=0$, отже функція $f(x)$ **неперервна**. Побудуємо її графік.

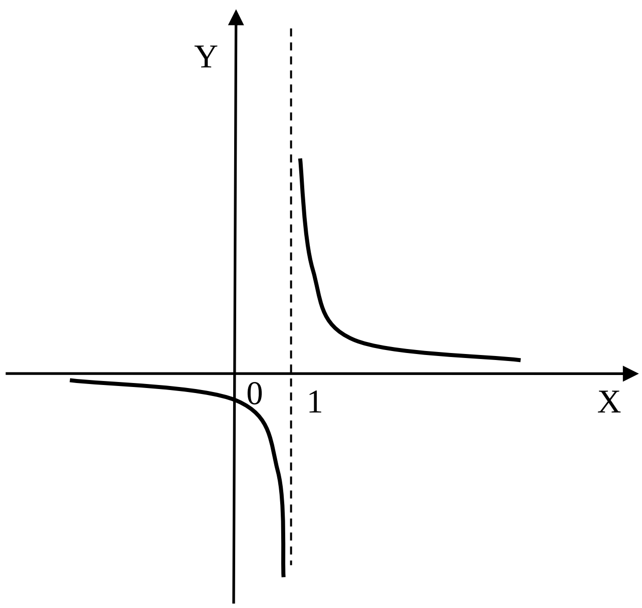



**Приклад 39.** Знайти точки розриву функції $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, дослідити їх характер і побудувати графік.

<u>Розв’язок.</u> Ця функція неперервна в усіх точках її області визначення. Область визначення функції $x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty;\quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

Лівостороння та правостороння границі функції нескінченні, отже, в точці $x=1$ маємо розрив ІІ-го роду. Побудуємо графік цієї функції.



**Приклад 40.** Знайти точки розриву функції $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & -\infty<x<0\\ x, & 0\le x<\infty\end{cases}$,

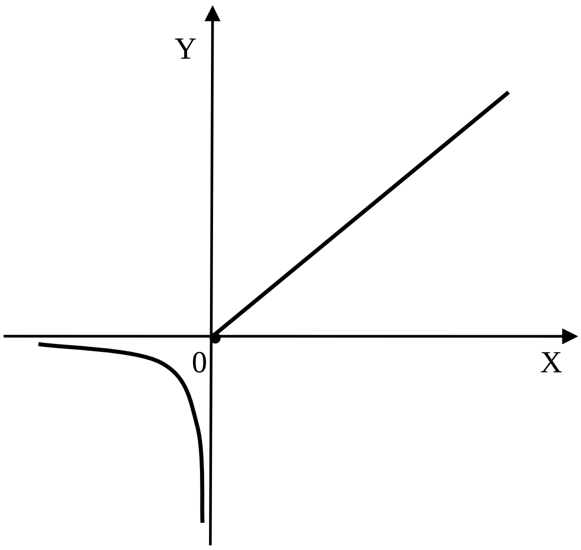
дослідити їх характер і побудувати графік.

Розв'язок. Функція $\frac{1}{x}$ неперервна в усіх точках своєї області визначення. Область визначення функції $x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. Отже, дослідимо на розрив точку $x=0$. Знайдемо лівосторонню і правосторонню границі функції в точці $x=0$.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x)=0.$$

Лівостороння границя нескінчена, отже, в точці $x=0$ маємо розрив II-го роду. Побудуємо графік цієї функції.




### 3. Індивідуальні завдання

1. Знайти точки розриву і побудувати графіки функцій:

Варіант 1

1. $y=\begin{cases}2^x, & -1\le x\le 1\\ x-1, & 1<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$ 2. $y=\dfrac{1}{x+1}$

Варіант 2

1. $y = \begin{cases} x^2 + 2, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$

Варіант 3

1. $y = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & x \le 0 \\ 2x + 3, & x > 0 \end{cases}$ 2. $y = \ln x + \dfrac{1}{x - 1}$

Варіант 4

1. $y = \begin{cases} 2x + 3, & x \le 0 \\ \sin x, & 0 < x \le \pi \\ x^2 + 4, & x > \pi \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{2x - 3}{x + 2}$

Варіант 5

1. $y = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ \cos x, & 1 < x \le \pi \\ 2x, & x > \pi \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{x - 1}{x + 3}$

Варіант 6

1. $y = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \le x \le 1 \\ 4 - 2x, & 1 < x < 2{,}5 \\ 2x - 7, & 2{,}5 \le x \le 4 \end{cases}$ 2. $y = 3^{\frac{x}{4 - x^2}}$

Варіант 7

1. $y = \begin{cases} \cos x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{4} \\ 1, & x = \dfrac{\pi}{4} \\ x^2 - \dfrac{\pi^2}{16}, & \dfrac{\pi}{4} < x \le \pi \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{x^3 - x^2}{2(x - 1)}$

Варіант 8

1. $y=\begin{cases}\sin x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le 0\\ x, & 0<x\le 2\\ 3x+1, & x>2\end{cases}$ 2. $y=x+\dfrac{1}{x+2}$

Варіант 9

1. $y=\begin{cases}2, & x=0, x=\pm 2\\ 4-x^2, & 0<|x|\prec 2\\ 4, & |x|>2\end{cases}$ 2. $y=x^2+5x+\dfrac{1}{x}$

Варіант 10

1. $y=\begin{cases}x^2, & x\le 0\\ \sin x, & 0<x\le \pi\\ 2x+1, & x>\pi\end{cases}$ 2. $y=2-\dfrac{1}{x}$

Варіант 11

1. $y=\begin{cases}2^x, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$ 2. $y=2^{\frac{1}{x-2}}$

Варіант 12

1. $y=\begin{cases}arctgx, & x\le 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$ 2. $y=1-2^{\frac{1}{x}}$

Варіант 13

1. $y=\begin{cases}\ln(x+3), & -3<x\le 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$ 2. $y=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

Варіант 14

1. $y=\begin{cases}\arcsin x, & -1\le x<0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$ 2. $y=\dfrac{x^3+x}{2x}$

Варіант 15

1. $y = \begin{cases} tgx, & -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{4 - x^2}{x - 5}$

Варіант 16

1. $y = \begin{cases} tg2x, & -\dfrac{\pi}{4} < x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 2 \\ x + 5, & x > 2 \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x}}}$

Варіант 17

1. $y = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ x + 1, & 0 \le x < 2 \\ x^2, & x \ge 2 \end{cases}$ 2. $y = 1 + \dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$

Варіант 18

1. $y = \begin{cases} \ln x, & 0 < x \le 1 \\ 2x, & 1 < x < 3 \\ x^2 + 1, & x \ge 3 \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{1 + 2x}{x + 1}$

Варіант 19

1. $y = \begin{cases} 3x^2 + 2, & x \le 0 \\ x + 2, & 0 < x \le 1 \\ x^2 + 5, & x > 1 \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{1 + 2x}{x + 4}$

Варіант 20

1. $y = \begin{cases} arctgx, & x \le 0 \\ x^2 - 2, & x > 0 \end{cases}$ 2. $y = \dfrac{1}{x + 3}$

Варіант 21

1. $y = \begin{cases} 3^x, & x \le 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x \le 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$

2. $y = 3x + \dfrac{1}{x}$

Варіант 22

1. $y = \begin{cases} \ln x, & 0 < x \le 1 \\ x^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$

2. $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$

Варіант 23

1. $y = \begin{cases} \arccos x, & -1 \le x < 0 \\ x^2 + 2, & x \ge 0 \end{cases}$

2. $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

Варіант 24

1. $y = \begin{cases} \sin x, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x < 2 \\ 2x + 3, & x \ge 2 \end{cases}$

2. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

Варіант 25

1. $y = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & x < 0 \\ x^2 + 2, & x < 0 \end{cases}$

2. $y = \dfrac{x - 7}{x - 2}$

Список літератури


1. Є.С. Сінайський, Л.В. *Новікова, Л.І. Заславська Вища математика Дніпропетровськ. НГУ. 2004 (частина 1)*
2. Геворкян Ю.Л. Теорія границь і диференціальне числення функцій однієї змінної: навч. посібник.- К.: ІСДО, 1993.-124 с.
3. Олексенко В. М. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: підручник. – Харків: НТУ «ХПІ», 2000 – 372 с.
4. Вища математика в прикладах і задачах: у 2 т. Т.1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посібник / Л.В.Курпа, Ж.Б.Кашуба, Г.Б.Лінник [та ін.]; за ред. Л.В.Курпи. – Харків: НТУ «ХПІ», 2009. – 532с.
5. Вища математика. Розв’язання задач та варіанти типових розрахунків. Т.1.: Навч. Посібник / За ред. Л.В.Курпа. — Харків: НТУ “ХПІ”, 2002 – 316с.
6. Тестові завдання за темою «Диференціювання функції однієї змінної». / упоряди.: Сушко С.О., Сточай В.Ф., Фомичова Л.Я. – Дніпропетровськ: Національний Гірничий університет, 2006. – 70 с.
7. Практикум з початків математичного аналізу: Навчальний посібник./ Новикова Л.В., Уланова Н.П., Приходько В.В. – Дніпропетровськ: НГУ, 2006. – 109 с.
8. Математика 1. Конспект лекцій. Частина 1. / Л.Я.Фомичова– Дніпро: ТОВ «Лізунов Прес», 2017. – 72 с.
9. Практикум з початків математичного аналізу: навч. посібник / Новикова Л.В., Уланова Н.П., Приходько В.В. – Дніпропетровськ: НГУ, 2006. – 109 с.

Навчальне видання

**Сдвижкова** Олена Олександрівна
**Бабець** Дмитро Володимирович
**Тимченко** Світлана Євгенівна
**Клименко** Діна Володимирівна

# ФУНКЦІЯ. ГРАНИЦЯ. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЇ.

Методичні рекомендації до практичних занять
з дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 113 «Прикладна математика»

В авторській редакції

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро просп. Дмитра Яворницького , 19